地震荷重下の座屈耐力に着目した単層格子屋根構造の形状探索

SHAPE OPTIMIZATION OF SINGLE-LAYER LATTICE SHELL ROOFS FOCUSING ON BUCKLING STRENGTH UNDER SEISMIC LOAD

林　裕真*，竹内　徹**，小河利行***
Yuma HAYASHI , Toru TAKEUCHI and Toshiyuki OGAWA

For designing grid-shell roofs in seismic zone as Japan, buckling phenomena must be considered not only for uniformly distributed loads but also for seismic response. Although the seismic response of such single-layered roofs are known to be very complicated, it is represented by asymmetrical distributions. Various optimization techniques have been applied to decide the shape of such roofs, but optimized shapes taken seismic response into account is not studied very much. In this paper, optimized roof shapes which maximizes the buckling strength not only against uniform load but also seismic response is investigated.

Keywords : *Grid shell roof, Buckling strength, Seismic response, Geometrical nonlinearity, optimization*
グリッドシェル，座屈耐力，地震応答，幾何学的非線形性，最適化

1. 序

近年，欧州ではグリッドシェルと呼称されるガラス皮膜を支える単層格子屋根構造が盛んに建設されるようになってきている。この背景には伝統建築の躯体に負担をかけない軽量構造による屋外空間の室内化，環境性能の向上等の要求に対し，数値解析技術や加工技術の発展により自由形状の単層格子屋根が容易に設計・施工できるようになった状況がある。屋根形状の決定に際しては近年応用研究の発展の著しい最適化理論の応用による形状探索手法が利用されることが多い。単層屋根構造の形状探索に最適化手法を応用した研究は枚挙に暇がなく，その多くは屋根架構内の歪エネルギー最小化を目的関数としたものであるが，座屈耐力の最大化を目的としたものもいくつか見られる [1),2)]。特に単層格子屋根構造では面外剛性が小さいため座屈非線形性の影響が大きく，非線形座屈荷重の最大化を目標とした最適化研究も試みられている。ただし，非線形座屈荷重を考慮して最適化を行う場合，計算ステップごとに非線形釣合式を解いて経路上の臨界点を一旦求めて感度を評価する必要があり，計算量が増大する。このため線形座屈荷重に対する最適形状を求め，非線形座屈解析を行ったり，ノックダウンファクターを考慮し耐力を確認したりすることも行われている。この場合，変形の進行に伴う座屈モードの入れ替わりにも留意する必要がある。加藤，中澤ら [3)]は 4 点支持されたブレース付き単層格子シェル屋根構造に対し，均等荷重および地震荷重を受けた際の線形座屈荷重の最大化を目的とした形状探索を実施している。

一方，日本のように地震発生頻度の高い地域においてこのような単層格子屋根構造を建設する際には，地震応答荷重下における座屈耐力をも設計に考慮する必要がある。竹内，小河ら [4)]はある程度面外剛性のあるラチスドーム屋根構造，円筒ラチスシェル屋根構造について地震応答が概ねライズに沿った水平加速度と逆対称の鉛直加速度で代表されることを示し，下部構造剛性をパラメータとした等価静的地震荷重を示した。単層格子屋根構造ではより多くの振動モードが励起されるが，下部構造との共振が生じる領域または免震支承を使用した場合には，逆対称振動モードが支配的となる。このような荷重分布に対する座屈荷重並びに座屈荷重を最大化する屋根形状についてはまだあまり明らかになっていない。

そこで，本研究ではベジエ曲面，推動曲面の 2 種類の単層格子屋根形状に対し種々の最適化手法を適用し，まず鉛直等分布荷重に対する最適形状を求める。目的関数には歪エネルギー最小化と線形座屈荷重最大化を採用し，得られる形状の差と目的外指標の値を確認する。次に，地震応答を置き換えた静的等価地震荷重分布下における最適屋根形状の探索を行い，得られる屋根形状の差異を確認する。さらに，両荷重分布下の座屈荷重を最大化するパレート解および歪エネルギー最小化と座屈荷重最大化に関するパレート解の集合を求め，その特性について分析する。また，得られた各形状における卓越振動モードおよび地震応答特性を分析し，既往提案評価式との整合性を確認する。最終的に，得られた形状に対し非線形座屈解析および地震応答解析を行い，地震入力に対する耐力の確認を行う。

*　東京工業大学建築学専攻　大学院生　Graduate School Student, Tokyo Institute of Technology.
**　東京工業大学建築学専攻　教授・博士(工学)　Prof., Dept. of Arch. and Building Eng.,Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.
***　東京工業大学建築学専攻　教授・工博　Prof., Dept. of Arch. and Building Eng., Tokyo Institute of Technology, Dr. Eng.

２． 最適化手法と曲面の記述法

検討に先立ち，本研究において用いる単層格子屋根形状の記述法および最適化手法について述べる。

２．２ 曲面の記述

本研究では，図 1 に示すベジェ曲面と推動曲面の 2 種類の曲面により単層直交格子屋根面の記述を行う。

$m \times n$ 次テンソル積ベジェ曲面 $\boldsymbol{S}(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))^{\mathrm{T}}$ を，$(m+1) \times (n+1)$個の制御点 $\boldsymbol{R}_{ij} = (R_{x,ij},\ R_{y,ij},\ R_{z,ij})^{\mathrm{T}}$ および 2 つの媒介変数 $u, v \in [0, 1]$を用いて次のように表す。

$$\boldsymbol{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \boldsymbol{R}_{ij} \cdot B_i^m(u) \cdot B_j^n(v) \tag{1}$$

ここで，$B_i^m(u)$, $B_j^n(v)$は u, v 方向のバーンスタイン基底関数である。

推動曲面は，xz 平面内で定義された母線を xyz 空間内で定義された準線に沿って移動させた際の軌跡として得られる曲面である。母線 $\boldsymbol{G}(u)$は，媒介変数 u と適当な曲線 $\boldsymbol{C}_1$ を用いて式(2)のように表される。また，準線 $\boldsymbol{D}(v)$は，媒介変数 v と適当な曲線 $\boldsymbol{C}_2$ を用いて式(3)のように表される。推動曲面は四角形格子の平面保持条件を満たす曲面であり，四角形ガラス板を分割せずに配置可能な曲面となる。

$$\boldsymbol{G}(u) = \left(C_{1x}(u), 0, C_{1z}(u)\right)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{D}(v) = \left(C_{2x}(v), C_{2y}(v), C_{2z}(v)\right)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

以上の 2 曲線を用い，推動曲面 $\boldsymbol{S}(u,v)$を式(4)のように表す。

$$\boldsymbol{S}(u,v) = \alpha(v) \cdot \boldsymbol{G}(u) + \boldsymbol{D}(v) \tag{4}$$

ここで，$\alpha(v)$は準線上の媒介変数 v の位置における母線の伸縮係数であり，この値により母線は相似形に拡大，縮小され，掃引される。

格子屋根曲面上の節点は，u, v 方向の分割数 U, V に対し，媒介変数ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_U)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_V)^{\mathrm{T}}$ により決定する。

ベジェ曲面には双 5 次ベジェ曲面を用いるものとし，推動曲面の母線と準線には対称性の考慮と曲面記述の簡易化のため共通の 5 次ベジェ曲線を用いるものとする。また，対称性を考慮し，節点位置ベクトルは $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ とし，簡単のために伸縮係数は $\alpha(v) = 1$ とする。

２．２ 最適化問題の定式化

目的関数としては，線形座屈荷重の最大化と総歪エネルギー最小化の 2 つを採用し，それぞれの探索形状を探索し比較する。

多自由度系における座屈荷重は，線形剛性行列 $\mathbf{K}_T$ と幾何剛性行列 $\mathbf{K}_G$ に対する固有値問題(5)の解として与えられる。

$$\left(\mathbf{K}_L + \lambda_r \mathbf{K}_G\right)\boldsymbol{\Phi}_r = \mathbf{0} \tag{5}$$

λ^{lin} を λ_r の最小の固有値（1 次線形座屈荷重係数）とすると，線形座屈荷重 $\boldsymbol{P}_{cr}^{lin}$ は基準荷重 $\boldsymbol{P}_0$ に座屈荷重係数 λ^{lin} を乗じることにより定義される。線形座屈荷重 $\boldsymbol{P}_{cr}^{lin}$ の最大化は線形座屈荷重係数 λ^{lin} の最大化と同義であるため，本研究では線形座屈荷重係数 λ^{lin} の最大化を目的とした最適化問題 SOP1 を次のように定式化する。

SOP1) Maximize λ^{lin} (6)

Subject to $\boldsymbol{R}_{ij}^{\min} \le \boldsymbol{R}_{ij} \le \boldsymbol{R}_{ij}^{\max}$ (7)

$u_i^{\min} \le u_i \le u_i^{\max}$ (8)

$l^{\min} \le l \le l^{\max}$ (9)

式(7), (8)はそれぞれ曲面の制御点座標と節点位置ベクトルの側面制約であり，非現実的なシェル形状への収束を防止するために設けている。また，式(9)は部材長の上下限に対する制約であり，節点の交差や極端に偏った格子割を防止するために設けている。

構造物に荷重 $\boldsymbol{P}$ が載荷された際に生じる総歪エネルギーU は，各要素に生じた歪エネルギーの足し合わせとして，式(10)で表される。

$$U = \frac{1}{2}\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\boldsymbol{d} \tag{10}$$

上式より，総歪エネルギーU は外力仕事としてのコンプライアンスの半分を表し，総歪エネルギーは構造物の剛性の指標と見做すことができる。以上より，総歪エネルギーの最小化は剛性の最大化を表すため，本研究では総歪エネルギーU の最小化を目的とした最適化問題 SOP2 を次のように定式化する。

SOP2) Minimize U (11)

制約条件は SOP1 と同様に式(7)～(9)により与えるものとする。

また，本研究では，鉛直等分布荷重に対する座屈荷重係数 λ^{DL}，静的地震荷重に対する座屈荷重係数 λ^{EL}, 鉛直等分布荷重に対する総歪エネルギーU^{DL} の組合せにより，多目的最適化問題 MOP1，MOP2 を次のように定式化する。

MOP1) Maximize $\lambda^{DL}, \lambda^{EL}$ (12)

MOP2) Minimize $-\lambda^{DL}, U^{DL}$ (13)

MOP2 における λ^{DL} は，正負を入れ替えて最小化することで最大化を表現する。また，制約条件は式(7)～(9)により与える。

２．３ 使用する最適化手法

座屈荷重最大化問題では，最適解付近で複数の座屈固有値が重複することで感度係数が不連続になり，数理計画法の適用が困難となる場合があることが指摘されている [2]。そこで，本研究では感度係数が不要な手法を中心とした以下に示す 3 種類の最適化手法により単目的最適化計算を行うことで，得られる解の信頼性の向上を図る。

① 逐次二次計画法(Sequential Quadratic Programming : SQP)
② 滑降シンプレックス法(Nelder-Mead Method : NMM)
③ 実数値 GA(Real-coded Genetic Algorithm : RGA)

本研究では，SQP の計算には SNOPT Ver. 7.2[5]を用い，勾配情報は各設計変数についての有限差分により推定する。また，RGA は交叉手法に AREX[7]を用い，世代交代手法に JGG[8]を用いるものとする。多目的最適化問題の解法には，パレートフロンティア上の解を網羅的に求めることができる進化的解法が適しているとされる。本研究では，多目的最適化問題の解法には進化的多目的最適化手法の一種である，NSGA-II[9]を用いる。

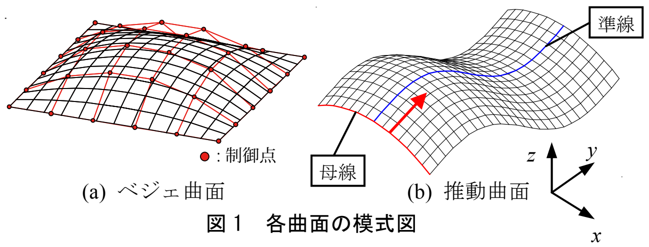


図１ 各曲面の模式図

3． 鉛直等分布荷重に対する形状探索

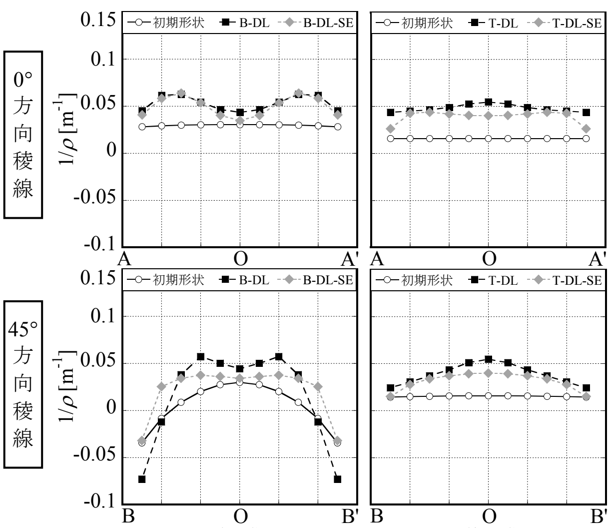
まず，鉛直等分布荷重下の単層格子屋根構造の最適形状を探索する。荷重は鉄骨格子とガラス仕上げの固定荷重を想定した表面積比例型の鉛直等分布荷重とし，単位面積荷重を 1.18kN/m^2 とする。

解析は曲面形状をベジェ曲面と推動曲面，目的関数を座屈荷重係数 λ^{DL} の最大化(SOP1)と総歪エネルギー U^{DL} の最小化(SOP2)とし，それぞれに対し斜材の有無を変化させた表 1 の 8 種類について行う。解析に用いる部材は表 2 に示す鋼管一種とする。境界条件は図 2 に示すように全周で放射方向ローラー支持とし，設計変数は対称性より図 2 に示す制御点と格子分割位置とする。初期形状は図 3，表 3 に示す形状とし，同図(a)中に示す A-O-A'を 0°方向稜線，B-O-B'を 45°方向稜線とする。最適化計算には SQP，NMM，RGA の 3 種類の手法を用いる。但し，NMM と RGA はランダム性を有する解析手法であるため，各モデルに対し 3 回ずつ解析を行う。以降には，各モデルについての解析のうち最良の結果のみを示す。

図 4，5 に各条件下での探索形状を座屈荷重係数 λ^{DL}，総歪エネルギー U^{DL} と併せて示す。また，図 6 に各形状の稜線上曲率分布を示す。どの探索形状も初期形状に比べ大きなライズとなっており，頂部付近で曲率が大きくなる傾向を有している。ベジェ曲面の λ^{DL} 最大化形状と U^{DL} 最小化形状は同様の曲率分布となっているが，格子配置は大きく異なる。推動曲面の λ^{DL} 最大化形状は斜材の有無により形状が変化しているが，U^{DL} 最小化形状は斜材の有無によらず最外部の格子間隔が狭まった同様の形状となる。

図 7 に斜材なしモデルの軸力図と曲げモーメント図を示す。初期形状では主材に大きな圧縮軸力が，外周部に大きな曲げモーメントが発生している。ベジェ曲面 λ^{DL} 最大化形状の斜材なしモデルは一部に曲げモーメントが増大しており，曲げ抵抗型の構造となっている。一方，その他の探索形状では曲げモーメントは小さくなり，軸力抵抗型の構造となる。

ベジェ曲面，推動曲面ともに λ^{DL} 最大化形状と U^{DL} 最小化形状の形状は異なっており，歪エネルギーを最小化する形状が座屈荷重を最大化するとは限らないことがわかる。また，両指標に対する探索形状を比較すると，最適解近傍においては，座屈荷重 λ^{DL} と歪エネルギー U^{DL} はトレードオフの関係になっているといえる。



(i) ベジェ曲面　(ii) 推動曲面

図 6 各探索形状の稜線上曲率分布

表 1 解析モデル（鉛直等分布荷重下）

モデル名	曲面記述法	目的関数	斜材	モデル名	曲面記述法	目的関数	斜材
B-DL	ベジェ曲面 (B)	λ^{DL} 最大化 (—)	無(—)	T-DL	推動曲面 (T)	λ^{DL} 最大化 (—)	無(—)
B-DL-D			有(D)	T-DL-D			有(D)
B-DL-SE		U^{DL} 最小化 (SE)	無(—)	T-DL-SE		U^{DL} 最小化 (SE)	無(—)
B-DL-SE-D			有(D)	T-DL-SE-D			有(D)

T-DL-SE-D

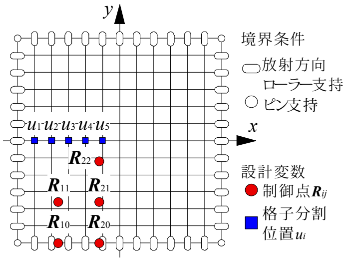
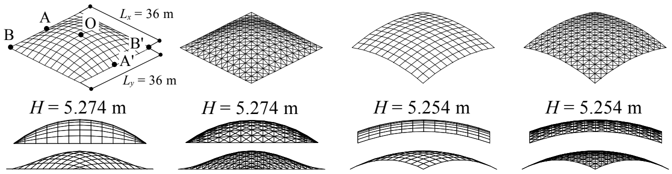


図 2 境界条件と設計変数

表 2 使用部材諸元

	外径 D [mm]	内径 d [mm]	弾性係数 E [N/mm^2]
主材	210.28	172.50	2.1×10^5
斜材	26	—	
テンションリング	2000	1800	



(a) 斜材なし　(b) 斜材あり　(c) 斜材なし　(d) 斜材あり

(i) ベジェ曲面　(ii) 推動曲面

図 3 各曲面の初期形状

表 3 初期形状の目的関数値

曲面形状	斜材	鉛直等分布荷重		静的地震荷重(0° / 45°)			
		λ^{DL}	U^{DL}	λ^{EL}	U^{EL}	λ^{DL+EL}	U^{DL+EL}
ベジェ	なし	20.20	10.86	58.35 / 60.78	6.30 / 5.49	17.94 / 9.52	16.95 / 30.72
	あり	49.25	9.88	78.15 / 68.95	4.38 / 10.00	33.87 / 18.40	13.96 / 28.02
推動	なし	9.92	24.84	52.40 / 56.94	7.97 / 6.57	18.37 / 9.56	18.55 / 31.74
	あり	21.17	54.98	78.38 / 68.20	6.55 / 16.47	33.86 / 18.37	16.26 / 29.29

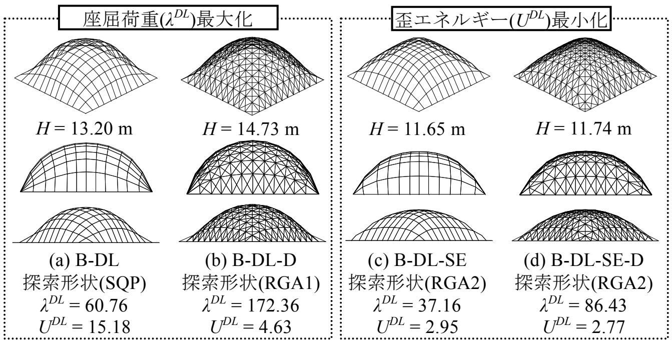


図 4 鉛直等分布荷重下でのベジェ曲面の探索形状

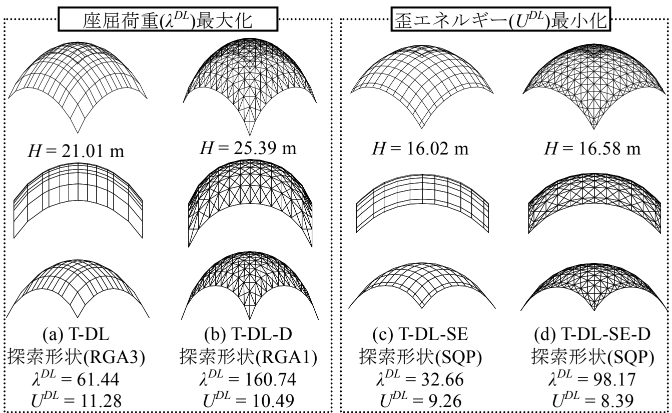


図 5 鉛直等分布荷重下での推動曲面の探索形状

4． 静的地震荷重に対する形状探索

ライズを有する屋根構造に水平地震動が入力された場合，水平方向の振動のみならず鉛直方向の振動も励起されることが知られている。この現象に対しては，竹内・小河らにより，逆対称 1 波型の振動モード（以下 O1 モード）に基づく鉛直および水平加速度分布の評価式が提案されている [4)]。

鉛直，水平応答加速度 A_V，A_Hは式(14)～(19)により計算される。

$$A_V = A_{eq} F_V \cos\varphi_2 \cdot \sin(\pi\varphi_1/\theta)\cdot\cos(\varphi_2/2) \tag{14}$$

$$A_H = A_{eq}\left\{1+(F_H-1)\cos(\pi\varphi_1/(2\theta))+F_V\cos\varphi_2\cdot\sin(\varphi_1/2)\right\} \tag{15}$$

$$F_V = \begin{cases} 3C_V(\theta) & (0 < R_T \le 5/(32\theta)) \\ \left(\sqrt{5/(2\theta R_T)}-1\right)C_V(\theta) & (5/(32\theta) < R_T \le 5/(2\theta)) \\ 0 & (5/(2\theta) < R_T) \end{cases} \tag{16}$$

$$F_H = \begin{cases} C_H(\theta) & (0 < R_T \le 5/(4(C_H(\theta))^2)) \\ \sqrt{5/(4R_T)} & (5/(4(C_H(\theta))^2) < R_T \le 5/4) \\ 1 & (5/4 < R_T) \end{cases} \tag{17}$$

$$C_V(\theta) = C_4 \sin(3/4)\theta\cos(3/4)\theta \tag{18}$$

$$C_H(\theta) = C_1\sin^2(3/4)\theta - C_2\sin(3/4)\theta + C_3 \tag{19}$$

ここに，F_V, F_H：鉛直，水平応答増幅率，θ：半開角，φ_1, φ_2：屋根部節点の極座標表示，A_{eq}：等価一質点系の応答加速度，C_1～C_4：定数 ($C_1 = C_4 = 2.47$, $C_2 = 1.33$, $C_3 = 3.00$)，T_R：等価 1 質点系の固有周期，T_R：屋根部 O1 モード固有周期，R_T：支持架構と屋根部の周期比 ($R_T = T_{eq} / T_R$)である。但し，屋根部のみのモデルでは $R_T = 0$ とする。

屋根部の固有周期と支持架構の固有周期が近接する R_T ≒ 1.0 近傍においては，屋根部と支持架構の共振により応答が増幅するため，F_Vおよび F_Hを式(20)～(23)により修正する。

$$F_V^{'} = \sqrt{F_V^2 + \frac{1}{(1-R_T^2)^2 + (1/R_M)}} \tag{20}$$

$$F_H^{'} = \sqrt{F_H^2 + \frac{1}{(1-R_T^2)^2 + (1/R_M)^{\theta}}} \tag{21}$$

$$M_R^{'} = C_M(\theta)\cdot M_R \tag{22}$$

$$C_M(\theta) = 0.55\cdot(M_{eq}/M_R)^{(\theta-\pi/6)/2} \tag{23}$$

ここに，M_R：屋根部質量，M_{eq}：全質量，R_M：支持架構と屋根部の質量比($R_M = M_{eq} / M_R$)である。

式(14), (15)で計算される加速度分布に節点の負担重量を乗じた荷重を静的地震荷重分布として設定し，同分布下における単層格子屋根構造の最適形状を探索する。

解析は曲面形状をベジェ曲面と推動曲面，地震荷重入力方向を境界直交方向からの 0° 入力と対角方向からの 45° 入力，目的関数を座屈荷重 λ^{EL} の最大化(SOP1)と総歪エネルギーU^{DL+EL} の最小化(SOP2)とし，それぞれに対し斜材の有無を変化させた表 4 の 16 種類について行う。但し，座屈荷重最大化には静的地震荷重のみを載荷した状態の座屈荷重係数 λ^{EL} を用い，総歪エネルギー最小化には鉛直等分布荷重載荷後に静的地震荷重を載荷した状態の総歪エネルギーU^{DL+EL} を用いる。境界条件および使用部材は前章と同様とし，図 3, 表 3 の形状を初期形状とする。最適化計算には SQP，NMM，RGA を用い，各モデルの最良の結果のみを示す。

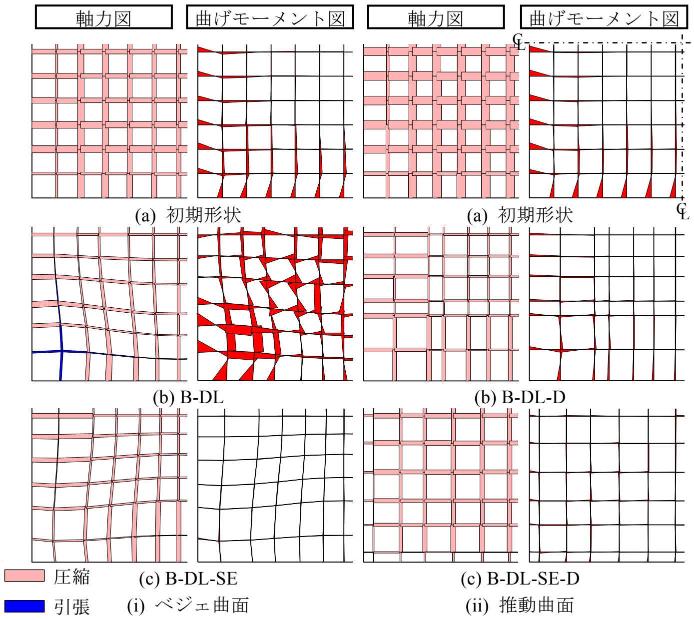


図 7 斜材なしモデルの軸力図・曲げモーメント図（1/4 領域）

表 4 解析モデル（静的地震荷重下）

モデル名	曲面記述法	入力方向	目的関数	斜材	モデル名	曲面記述法	入力方向	目的関数	斜材
B-EL0	ベジェ曲面 (B)	0° (EL0)	λ^{EL} 最大化 (—)	無(—)	T-EL0	推動曲面 (T)	0° (EL0)	λ^{EL} 最大化 (—)	無(—)
B-EL0-D				有(D)	T-EL0-D				有(D)
B-EL0-SE			U^{DL+EL} 最小化(SE)	無(—)	T-EL0-SE			U^{DL+EL} 最小化(SE)	無(—)
B-EL0-SE-D				有(D)	T-EL0-SE-D				有(D)
B-EL45		45° (EL45)	λ^{EL} 最大化 (—)	無(—)	T-EL45		45° (EL45)	λ^{EL} 最大化 (—)	無(—)
B-EL45-D				有(D)	T-EL45-D				有(D)
B-EL45-SE			U^{DL+EL} 最小化(SE)	無(—)	T-EL45-SE			U^{DL+EL} 最小化(SE)	無(—)
B-EL45-SE-D				有(D)	T-EL45-SE-D				有(D)

T-EL0-SE-D

図 8，9 に各条件下での探索形状を座屈荷重係数 λ^{EL}，総歪エネルギーU^{DL+EL} と併せて示す。また，図 10 に各形状の稜線上曲率分布を示す。静的地震荷重下の探索形状は鉛直等分布荷重下の探索形状に比べ小さいライズを持つ形状となっており，45°入力のモデルは 0°入力のモデルに対しさらに小さいライズを持つ形状となっている。また，0°入力のモデルの λ^{EL} は 45°入力のモデルの λ^{EL} に比べ小さくなっており，45°方向からの地震動に対し若干不利となっていることがわかる。各探索形状の目的関数は初期形状に比べ改善しているものの，その改善率は直等分布荷重下での改善率に比べると小さい。探索形状の格子割は，中央部に格子が集中する，格子間隔の広い部分と狭い部分が存在するなど，鉛直等分布荷重に対する探索形状に比べて不均等なものが見受けられる。このことは，静的地震荷重が不等分布荷重であることに起因すると考えられる。また，推動曲面の 0°入力モデルは曲率分布が平滑化され，球面に近い形状となる。

図 11，12 に地震荷重入力方向 0°の探索形状について，軸力図と曲げモーメント図を示す。ベジェ曲面，推動曲面ともに，λ^{EL} 最大化形状では逆対称荷重と水平荷重の組合せにより半領域に引張力が生じ，他方に圧縮力が生じている。鉛直等分布荷重下の λ^{DL} 最大化形状と同様，λ^{EL} 最大化形状では初期形状に比べ大きな曲げモーメントが発生している。とりわけ，斜材ありモデルでは外周部の部材に軸力が集中する傾向が見られる。一方，U^{DL+EL} 最小化形状の軸力分布

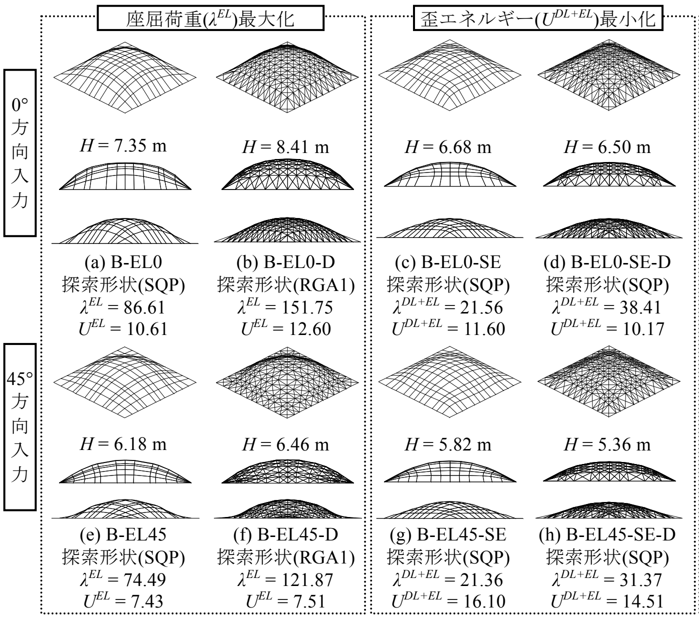


図 8　ベジェ曲面の探索形状

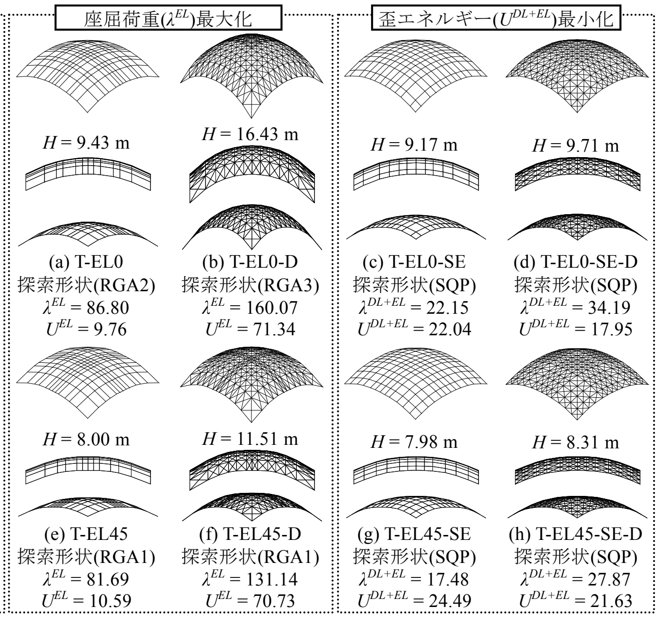


図 9　推動曲面の探索形状

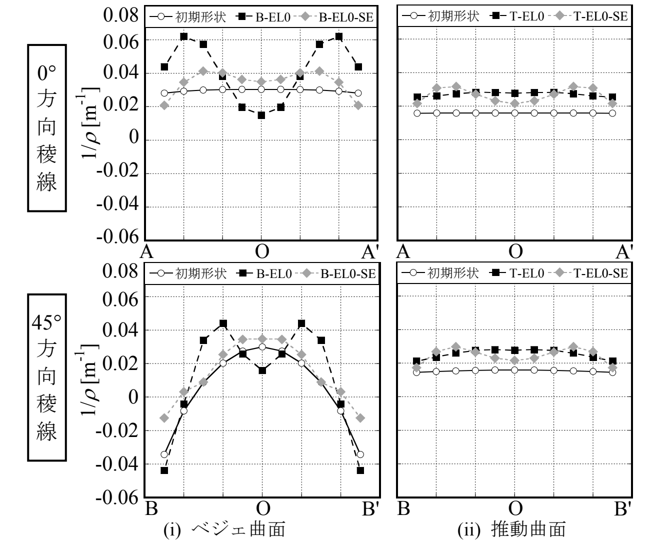


図 10　各探索形状の稜線上曲率分布

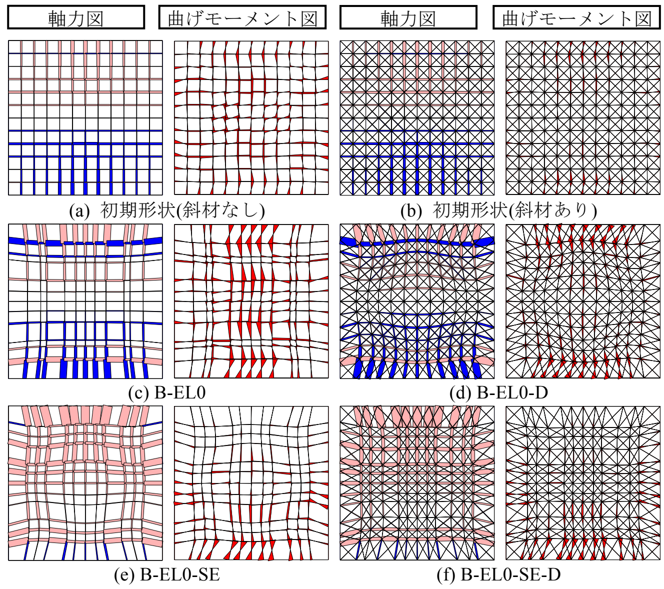
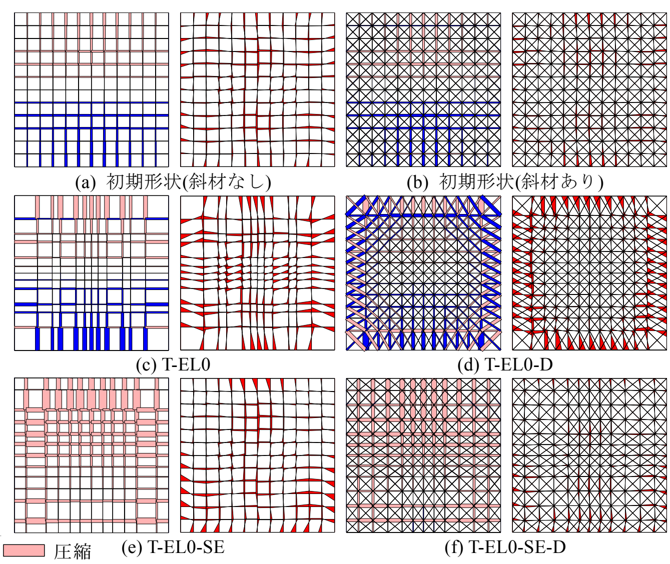


図 11　ベジェ曲面の軸力図・曲げモーメント図



圧縮
引張
図 12　推動曲面の軸力図・曲げモーメント図

は，鉛直等分布荷重と静的地震荷重の組合せにより，一方に偏った分布となっている。U^{DL+EL}最小化形状の曲げモーメントは，λ^{EL}最大化形状に比べると抑えられているものの，外周部の曲げモーメントは初期形状に比べ増加している。これらの傾向は 45°入力の探索形状についても同様にみられる。

このように，静的地震荷重下における探索形状は鉛直等分布荷重下における探索形状と異なる形状となる。そのため，鉛直等分布荷重下で座屈荷重を最大化する形状が静的地震荷重下で座屈荷重を最大化するとは限らず，λ^{DL} と λ^{EL} もまたトレードオフの関係になっているといえる。

5．複数の構造指標に対する形状探索

5．1　多目的最適化計算とパレート解形状

前章までの結果より，鉛直等分布荷重下での座屈荷重係数 λ^{DL} と総歪エネルギーU^{DL}，地震荷重下での座屈荷重係数 λ^{EL} はそれぞれトレードオフの関係にあるといえる。そこで，MOP1, 2 で表される多目的最適化を行い，これらの指標に対するパレート解を探索する。

最適化手法には NSGA-II を用い，交叉には AREX を用いる。各世代での子個体生成数は 100 とし，100 世代の解析を行う。解析はベジェ曲面，推動曲面の斜材なしのモデルについて行う。

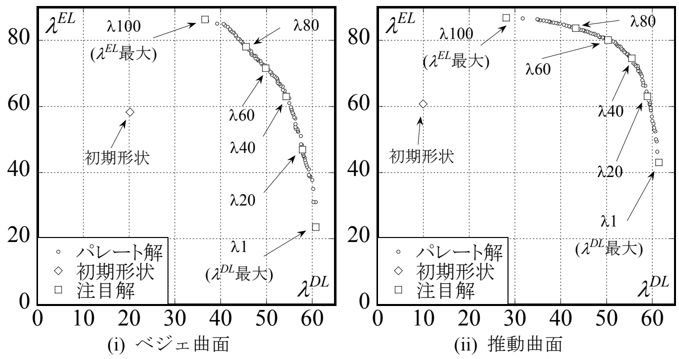
MOP1 で表される λ^{DL}-λ^{EL} の最適化により得られたパレート解を図 14 に示す。ベジェ曲面，推動曲面ともに，パレート解は λ^{DL} 最大点と λ^{EL} 最大点の間に万遍なく分布しており，良好にパレート解を求められているといえる。ここで，得られたパレート解を λ^{DL} の大きい順に λ1〜λ100 とし，代表的な形状に注目する。図 15，16 に示すように，パレート解の形状は λ^{DL} 最大形状(λ1)と λ^{EL} 最大形状(λ100)をつなぐ中間の形状となっており，その形状は λ^{DL} と λ^{EL} の比率によって滑らかに変化している。ここで，λ60 のように地震荷重下の最適形状に近いパレート解は，鉛直等分布荷重に対し λ^{DL} 最適解(λ1)の 8 割程度の座屈耐力を持ち，かつ地震荷重に対してはλ1 に対し 2 倍〜3 倍程度の座屈耐力を持つ形状となっている。

MOP2 で表される λ^{DL}-U^{DL} の最適化により得られたパレート解を図 17 に示す。ベジェ曲面，推動曲面ともに，パレート解は λ^{DL} 最大点と U^{DL} 最小点の間に万遍なく分布しており，良好にパレート解を求められているといえる。MOP1 と同様に，得られたパレート解を λ^{DL} の大きい順に U1〜U100 とし，代表形状に注目する。図 18，19 に示すように，パレート解の形状は λ^{DL} 最大形状(U1 =λ1)と U^{DL} 最小形状(U100)をつなぐ中間の形状となっており，その形状は λ^{DL} と U^{DL} の比率によって滑らかに変化している。ここで，U20 のように歪エネルギーも考慮したパレート解は，鉛直等分布荷重に対し λ^{DL} 最適解(U1)の 9 割程度の座屈耐力を持ち，かつ歪エネルギーは 9 割以下に減少した形状となっている。とりわけ，ベジェ曲面の U20 は歪エネルギーが効率的に改善しており，U1 の 2 割程度まで減少している。

５．２　パレート解の弾性非線形解析

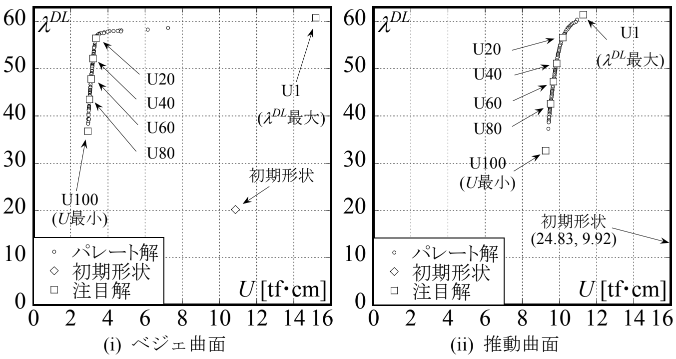
前節において注目したパレート解に対し幾何非線形性を考慮した弾性非線形座屈解析を行い，非線形座屈挙動を調査する。解析は鉛直等分布荷重分布(DL)，鉛直方向のみの静的地震荷重分布(EL_V)，鉛直と水平方向を合わせた静的荷重分布(EL_{VH})について行う。参照する節点は DL についてはシェル中央部とし，EL_V，EL_{VH} については最大の鉛直応答加速度が生じる節点とする。但し，弾性座屈荷重 P_{σ}^{el} は，荷重—変位曲線と推定座屈荷重曲線が交差する点（λ = 1.0 となる点），荷重—変位曲線の極大点，推定座屈荷重曲線の極小点のいずれかの条件を満たしたときの荷重—変位曲線上の荷重とする。

各パレート解の参照節点における負担面積当たりの線形座屈荷重 P_{σ}^{lin} と弾性座屈荷重 P_{σ}^{el} の推移を図 19，20 に示す。



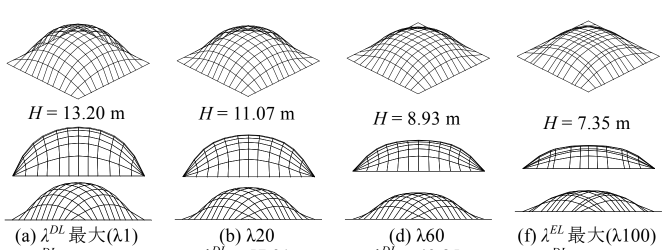
(i) ベジェ曲面　　(ii) 推動曲面

図 13　λ^{DL}–λ^{EL} 最適化のパレート解



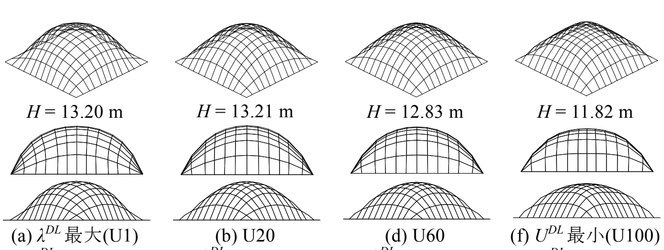
(i) ベジェ曲面　　(ii) 推動曲面

図 16　λ^{DL}–U^{DL} 最適化のパレート解



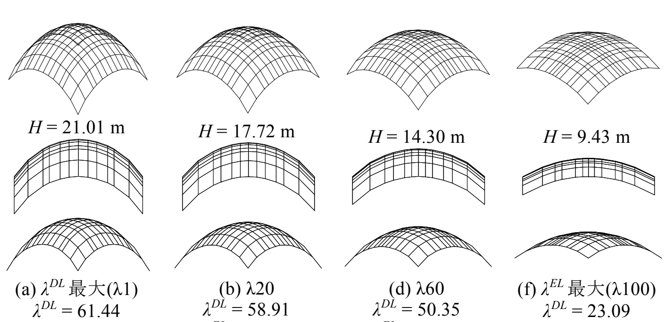
(a) λ^{DL} 最大(λ1) λ^{DL} = 60.76 λ^{EL} = 23.52　(b) λ20 λ^{DL} = 57.91 λ^{EL} = 46.97　(d) λ60 λ^{DL} = 49.85 λ^{EL} = 71.55　(f) λ^{EL} 最大(λ100) λ^{DL} = 37.75 λ^{EL} = 86.61

図 14　λ^{DL}–λ^{EL} 最適化のパレート解形状（ベジェ曲面）



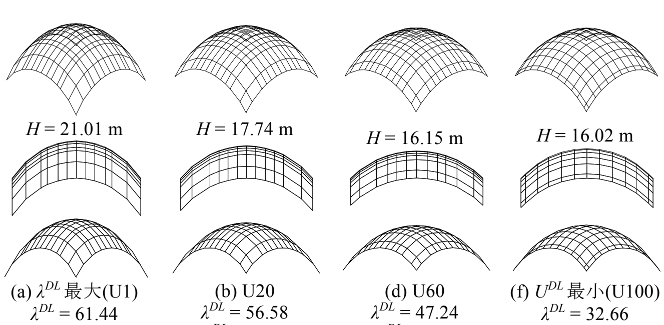
(a) λ^{DL} 最大(U1) λ^{DL} = 60.76 U^{DL} = 15.18　(b) U20 λ^{DL} = 56.44 U^{DL} = 3.36　(d) U60 λ^{DL} = 47.82 U^{DL} = 3.10　(f) U^{DL} 最小(U100) λ^{DL} = 36.74 U^{DL} = 2.92

図 17　λ^{DL}–U^{DL} 最適化のパレート解形状（ベジェ曲面）



(a) λ^{DL} 最大(λ1) λ^{DL} = 61.44 λ^{EL} = 43.07　(b) λ20 λ^{DL} = 58.91 λ^{EL} = 63.08　(d) λ60 λ^{DL} = 50.35 λ^{EL} = 80.08　(f) λ^{EL} 最大(λ100) λ^{DL} = 23.09 λ^{EL} = 86.80

図 15　λ^{DL}–λ^{EL} 最適化のパレート解形状（推動曲面）



(a) λ^{DL} 最大(U1) λ^{DL} = 61.44 U^{DL} = 11.28　(b) U20 λ^{DL} = 56.58 U^{DL} = 10.18　(d) U60 λ^{DL} = 47.24 U^{DL} = 9.68　(f) U^{DL} 最小(U100) λ^{DL} = 32.66 U^{DL} = 9.26

図 18　λ^{DL}–U^{DL} 最適化のパレート解形状（推動曲面）

λ^{DL}-λ^{EL} パレート解の DL および EL_{VH} に対する P_{cr}^{lin} は，目的関数の一つであるため，図 19(a), (c)のパレート解の番号と P_{cr}^{lin} の大小は対応している。DL に対する P_{cr}^{el} の大小は P_{cr}^{lin} の大小と一致しているが，EL_{VH} に対する P_{cr}^{el} が最大となるのはベジェ曲面では λ60，推動曲面では λ80 となっている。従って，線形座屈荷重の最大化形状であっても，弾性座屈荷重を最大化するとは限らないいことがわかる。

λ^{DL}-U^{DL} パレート解の DL に対する P_{cr}^{el} の大小関係は，ベジェ曲面の U1 を除き図 20(a)のパレート解番号と対応している。図 16(ii)にみるように，ベジェ曲面の U1 は他のパレート解に比べ歪エネルギーが非常に大きく，構造物剛性が小さい形状と見做すことができる。非線形解析においても U1 は過大な座屈前変形を生じ，幾何非線形性により耐力が大きく低下している。従って，大きい弾性座屈荷重 P_{cr}^{el} を持つ形状を得るためには，線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} に対する耐力のみならず，ある程度の構造物剛性を有することが必要であるといえる。

６． 探索形状の非線形座屈性状および地震応答特性

６．１ 非線形座屈性状

形状探索により得られた曲面のうち推動曲面について各探索形状の弾塑性非線形解析を行い，線形解析と弾性解析，弾塑性解析での座屈性状の差異を分析するとともに，弾性座屈荷重 P_{cr}^{el}，弾塑性座

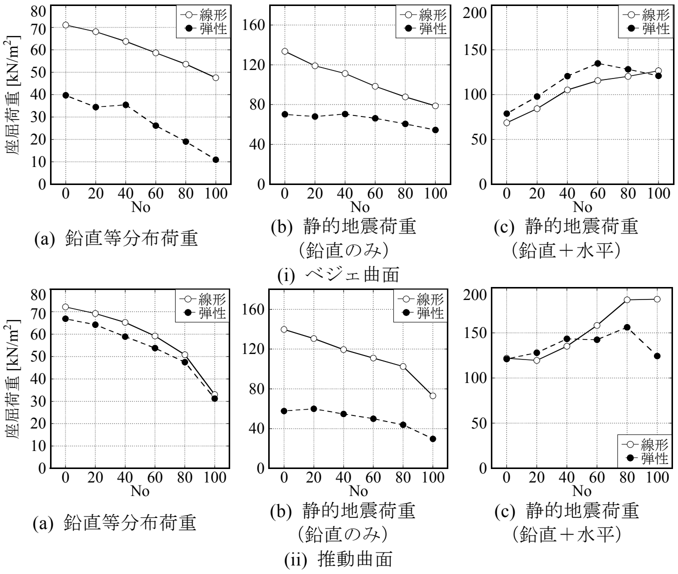


図 19 λ^{DL}–λ^{EL} パレート解の線形および弾性座屈荷重

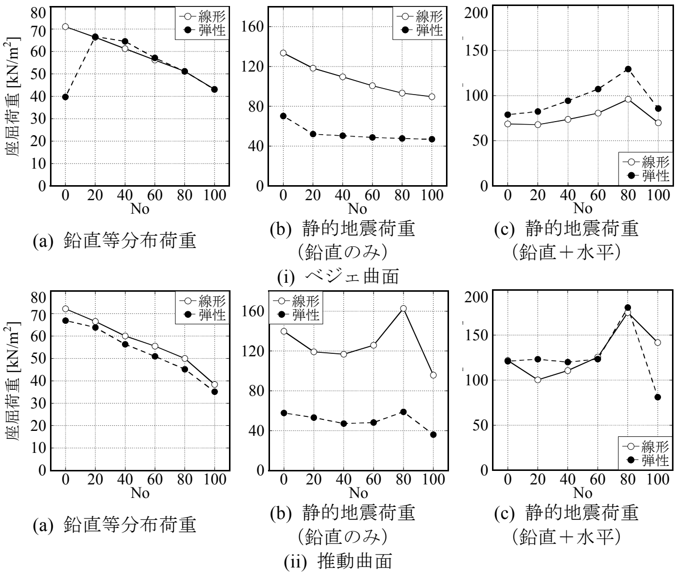


図 20 λ^{DL}–U^{DL} パレート解の線形および弾性座屈荷重

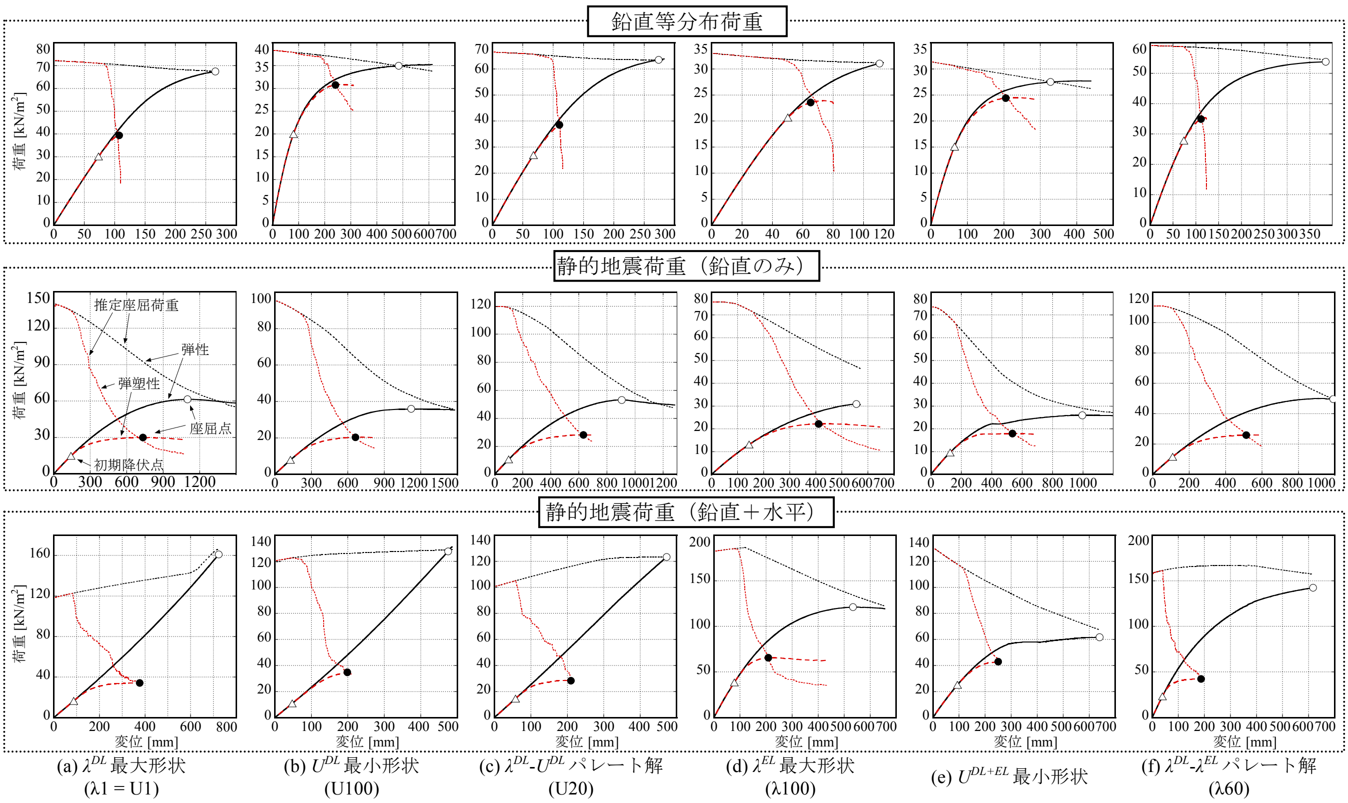


図 21 探索形状の荷重―変位関係

屈荷重 P_{cr}^{pl} の線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} に対する低減率 α^{el}, α^{pl} を調査する。

解析モデルは推動曲面の初期形状（図 3(c)）と鉛直等分布荷重に対する座屈荷重最大形状（図 5(a) : 以下 λ^{DL} 最大形状）と歪エネルギー最小形状（図 5(c) : U^{DL} 最小形状），静的地震荷重に対する座屈荷重最大形状（図 9(a) : 以下 λ^{EL} 最大形状）と歪エネルギー最小形状（図 9(c) : 以下 U^{DL+EL} 最小形状），多目的最適化により得られたパレート解の代表形状（図 16(d) : 以下 λ^{DL}-λ^{EL} パレート解，図 19(b) : 以下 λ^{DL}-U^{DL} パレート解）とする。解析に用いる荷重分布は，前章同様に DL，EL_V，EL_{VH} とする。

図 21 に各曲面の弾性解析および弾塑性解析の荷重―変位関係を，図 22 に各形状の低減率 α^{el}，α^{pl} を各荷重分布毎に示す。但し，参照する節点は鉛直等分布荷重ではシェル中央部とし，静的地震荷重では最大の鉛直応答加速度を与える節点とする。

鉛直等分布荷重載荷時は，静的地震荷重載荷時に比べ発生する変位は小さい。そのため，弾性座屈荷重 P_{cr}^{el} は線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} に対しあまり低減せず，弾性低減率 α^{el} は概ね 0.8 以上となっている。しかし，弾塑性解析では，初期形状以外のモデルにおいて部材の降伏とともに推定座屈荷重が急激に低下し，弾塑性座屈荷重 P_{cr}^{pl} は線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} から大幅に低減している。そのため，弾塑性低減率 α^{pl} は最小で 0.55 程度となっている。

静的地震荷重（鉛直）載荷時は，弾性解析についても大変形の発生に伴い推定座屈荷重が低下し，弾性低減率 α^{el} は 0.4 程度となっている。弾塑性解析ではさらに，早期に部材降伏が発生することで，弾塑性低減率 α^{pl} は 0.2 程度まで低下している。

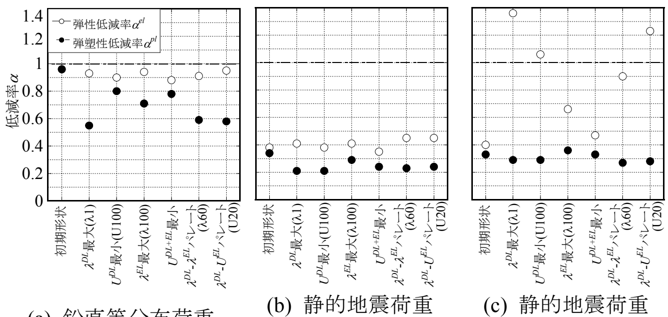
静的地震荷重（鉛直＋水平）載荷時は，比較的ライズの高いシェル形状は弾性解析において静的地震荷重の水平成分により引張が卓越し，変形とともに推定座屈荷重は上昇する傾向が見られる。しかし，弾塑性解析では部材の早期降伏に伴い推定座屈荷重は急激に低下し，どの形状でも弾塑性低減率 α^{pl} は 0.3 前後の値となっている。

図 22 より，引張による座屈荷重上昇が見られた静的地震荷重（鉛直+水平）下の弾性低減率を除くと，低減率は概ね一定の範囲に収まっているといえる。本研究の範囲においては，低減率は形状によらず荷重分布により概ね一定の値をとり，材料強度を考慮した場合の弾塑性低減率 α^{pl} は，概ね鉛直等分布荷重載荷時に 0.5，静的地震荷重載荷時に 0.2 が下限値となる。従って，鉛直等分布荷重と静的地震荷重に対する安全率の比は，概ね 2:5 となっている。

図 23 に，推動曲面の λ^{DL}-λ^{EL} パレート解を，弾塑性座屈荷重時の荷重係数(弾塑性座屈荷重の基準荷重に対する倍率)と併せて示す。弾塑性座屈荷重時の荷重係数は，線形解析時の座屈荷重係数に比べ大きく低下していることがわかる。ここで，弾塑性座屈荷重時の λ^{DL} と λ^{EL} の比が 1:1 に近い解を優良解とすると，優良解は線形解析時には左上の領域に存在している。両荷重分布に対する安全率の比 2:5 により直線を引くと，この直線は弾塑性座屈荷重時の λ^{DL} と λ^{EL} の大小を概ね表現できており，優良解を線形解析時において捉えることができている。よって，弾塑性低減率 α^{pl} を適切に評価できれば，弾塑性座屈荷重時の優良解を線形解析から推定することができると考えられる。

６．２　各探索形状の地震応答特性

前節で扱った各探索形状に対し，固定荷重による幾何非線形性を考慮した固有値解析を行い自由振動特性を把握した後，モード間の相関を考慮する CQC 法を用いた応答スペクトル法を用いて地震応答解析を行う。本研究では，文献 4)と同様に CQC 法で採用する振動モードの有効質量比和を 90%以上とする。入力地震波の応答スペクトルは図 24 に示す BRI-L2[10),11)]を用いる。



(a) 鉛直等分布荷重　(b) 静的地震荷重（鉛直のみ）　(c) 静的地震荷重（鉛直＋水平）

図 22　各形状の弾性・弾塑性低減率

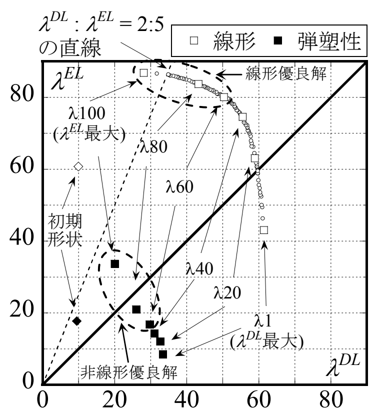


図 23　λ^{DL}–λ^{EL} パレート解

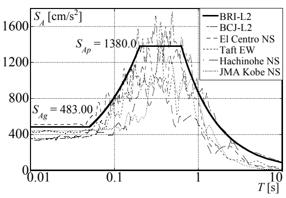


図 24　加速度応答スペクトル
BRI-L2(h = 0.02)

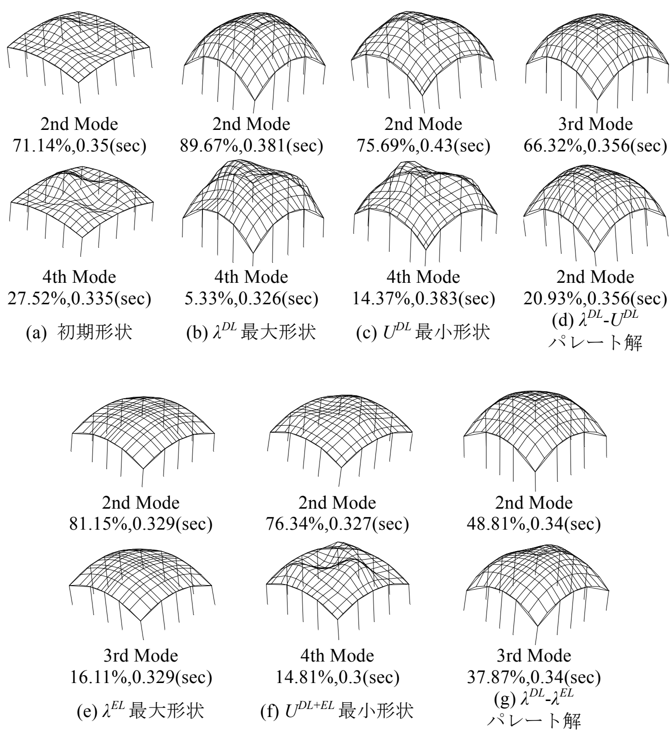
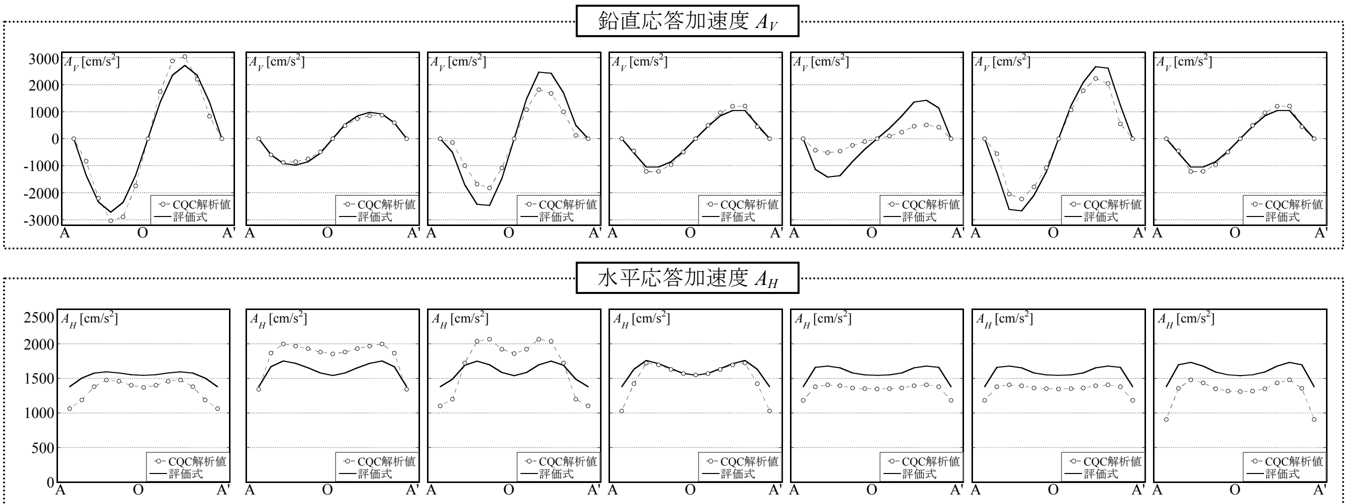


図 25　探索形状の卓越固有振動モード



(a) 初期形状 (b) λ^{DL} 最大形状 (λ1 = U1) (c) U^{DL} 最小形状 (U100) (g) λ^{DL}-U^{DL} パレート解(U20) (d) λ^{EL} 最大形状 (λ100) (e) U^{DL+EL} 最小形状 (f) λ^{DL}-λ^{EL} パレート解(λ60)

図 26　各形状の応答加速度

屋根部の応答が増幅する場合として，屋根部の O1 モードが卓越するような支持架構を持つ構造物に対する応答加速度評価の検証を行う。支持架構は屋根部の O1 モードが卓越するように，屋根部と支持架構を置換した等価 1 質点系の固有周期 T_{eq} と屋根部の O1 モード固有周期 T_R の比 R_T が 1.0 程度となるように設定する。

図 25 に支持架構付きモデルの卓越固有振動モードを，図 26 に CQC 法による各モデルの A-O-A'稜線上の鉛直，水平方向の応答加速度分布を評価式(14), (15)による応答加速度分布と併せて示す。各曲面形状で屋根部 O1 モードやスウェイを伴う振動モードが卓越しており，評価式による応答加速度分布は CQC 法による応答加速度分布と概ね良い対応を示している。

これより，既往評価式(14), (15)に節点負担重量を乗じて設定した静的地震荷重は，支持架構により応答が励起された単層格子屋根構造の形状探索に用いる上で妥当な分布を与えているといえる。

６．３　各探索形状の地震応答

最後に，各形状の時刻歴応答解析を行い，地震応答特性の差異を分析する。解析モデルは前節同様，R_T □ 1.0 の支持架構を付加したモデルとする。入力地震波は図 27 に示す BCJ-L2 とし，弾性および弾塑性モデルに対し，入力加速度の大きさを変化させて解析を行う。地震波の入力は 0° 方向（境界に対して垂直な方向）とする。

図 28 に各地震動強さに対する各形状の最大変位が発生する点の最大応答加速度―最大応答変位関係を，静的解析における降伏荷重 P_y と弾塑性座屈荷重 P_{cr}^{pl} の加速度換算値 A_y，A_{cr}^{pl} と併せて示す。

各形状の応答加速度は，部材の塑性化に伴い入力加速度に対する上昇が緩やかになり，概ね A_{cr}^{pl} 付近で頭打ちになる。そのため，各形状の地震時耐力は概ね静的解析における弾塑性座屈荷重 P_{cr}^{pl} と対応しているといえる。

また，応答加速度が頭打ちになる値は，鉛直等分布荷重に対する探索形状である(a)～(c)に比べ静的地震荷重に対する探索形状である(d)～(f)で大きくなっている。そのため，静的地震荷重に対する形状探索により，地震時耐力が向上した屋根形状を得ることができていると判断される。

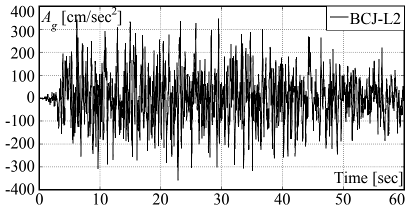


図 27　入力地震波（BCJ-L2，1 倍）

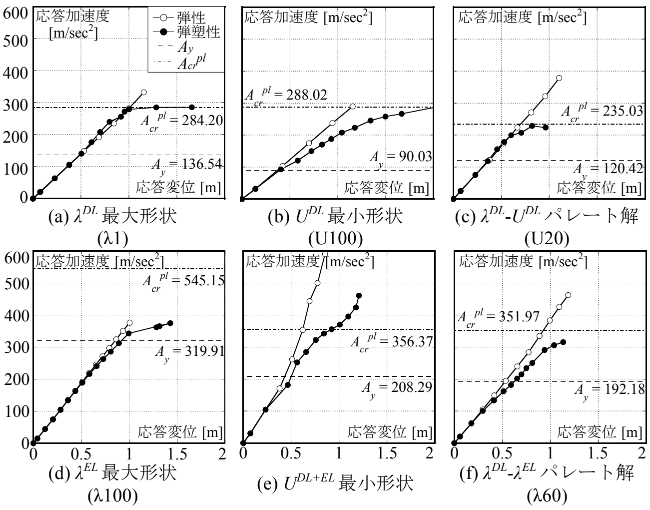


図 28　最大応答加速度―最大応答変位関係

８．　結

単層格子屋根構造について鉛直等分布荷重下および静的地震荷重下での座屈荷重最大形状および歪エネルギー最小形状を最適化手法を用いて探索し，その特徴を分析した。次に，これらの指標に対するパレート解形状を探索し，その特徴を分析した。最後に，得られた形状の非線形座屈解析および時刻歴応答解析を行い，探索形状の静的および動的特性を検証した。以下に得られた知見を示す。

1) 鉛直等分布荷重に対する歪エネルギー最小化形状は必ずしも座屈荷重を最大化するとは限らず，最適解近辺ではこれら 2 つの指標はトレードオフの関係にある。

2) ベジェ曲面，推動曲面ともに，静的地震荷重下の座屈荷重最大最大化形状は，鉛直等分布荷重下の座屈荷重最大化形状に比べ小さいライズとなる傾向がある。

3) 多目的最適化により，鉛直等分布荷重下の座屈荷重をあまり低下させずに静的地震荷重に対する座屈荷重を向上させるパレート解形状を得ることができる。

4) 各形状の弾塑性座屈荷重は座屈前の大変形および材料非線形性により大幅に低減するが，低減率は荷重分布により概ね一定の値をとるため，低減率比が適切に評価できれば，弾塑性座屈荷重に対する優良解は線形座屈荷重に対する形状探索により推定できる。

5) 静的地震荷重下の座屈荷重を目的関数に加えた形状探索により，地震時耐力が向上した屋根形状が得られることを確認した。

謝辞

本研究の一部は，科学研究費補助金基盤研究(B)(課題番号：22360223)の助成を受けたものである。また，SQP の解析については，広島大学，大崎純教授の御指導を戴いた。ここに謝意を表します。

参考文献

1) 小河利行，大崎純，立石理恵：線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化，日本建築学会構造系論文集, No.570, pp.129-136, 2003.8

2) 山本憲司，皆川洋一，大森博司：座屈荷重を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究，日本建築学会構造系論文集，No.564，pp.95-102, 2003.2

3) S. Kato, S. Nakazawa, Y. Takiuchi : Buckling and Seismic Response Performance of Free Form Lattice Shells, IABSE-IASS Symposium London 2011, p.65, 2011.9

4) 竹内徹，熊谷知彦，岡山俊介，小河利行：ライズの高い支持架構付きラチスドームの地震応答評価，日本建築学会構造系論文集，No.629, pp.1119-1126, 2008.7

5) P. E. Gill, W. Murray, M. A. Saunders : SNOPT : An SQP algorithm for large-scale constrained optimization, SIAM J. Optim., Vol.12, pp.979-1006, 2002

6) J. A. Nelder, R. Mead : A simplex method for function minimization, Computer Journal 7, pp.308–313, 1965

7) 秋本洋平，永田裕一，佐久間淳，小野功，小林重信：適応的実数値交叉 AREX の提案と評価，人工知能学会論文誌, Vol.24, No.6, 2009.11

8) 小林重信：実数値 GA のフロンティア，人工知能学会誌，Vol.24，No.1, pp.147-162，2009.1

9) K. Deb, S. Agawal, A. Pratap, T. Meyarivan : A Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization : NSGA-II, KanGAL Report 200001, Indian Institute of Technology, Kanpur, PIN 208 016, India, 2000

10) 建設省建築研究所：建築研究資料 No.83 設計用入力地震動作成手法, 1994.11

11) 笠井和彦，伊藤浩資，渡辺厚：等価線形化法による一質点系弾性構造の最大応答予測，日本建築学会構造系論文集, No.571, pp.53-62,